Энергетические рынки: оптимизация сетей передачи

Васин А.А., Григорьева О.М., Цыганов Н.И.

Москва, 2019

Markets for energy resources (natural gas, oil, etc.) play an important role in the economies of many countries. Such market usually includes its own transmission network. Optimization of this network is a problem of practical interest since the share of transmission costs in the final price of every resource is rather large in many countries. While publications in this field (Davidson et al., 2009; Hogan, 1998; Roger Z. Rios-Mercado, Conrado Borraz-Sanchez, 2014; Edoli, Fiorenzani, Vargiolu, 2005) usually consider short-term optimization problems related to markets with fixed network structures, we continue our studies (Daylova, Vasin, 2014; Vasin, Grigoryeva, Tsyganov, 2017; Vasin, Dolmatova, 2016) that aim to develop methods for computation of optimal transmission network expansion.

The transmission system optimization problem under consideration is a special case of the social welfare optimization for a market with several goods under a perfect competition (Arrow, Debreu, 1954). We study the welfare optimization problem, taking into account the production costs, consumer utilities, and the costs of expanding the transmission lines in the market network. The difficulty of solving this problem relates to the fact that building or expansion of any line in the transmission network requires valuable fixed costs. If the optimal set of expanded lines were known, the problem would be convex. However, the efficient computation of this set requires developing special optimization methods. Generally, this problem is NP-hard since the transportation problem with non-convex transmission costs is NP-hard (Guisewite, Pardalos, 1990).

Введение

Рассматривается:

- Сетевой энергетический рынок однородного товара (такого, как нефть или газ) с древовидной структурой в условиях совершенной конкуренции.

Задача:

- Оптимизация транспортной системы рынка.

Критерий оптимизации:

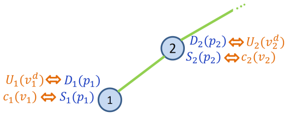
- Общественное благосостояние рынка.

Необходимо определить:

- оптимальное множество расширяемых линий;
- оптимальную пропускную способность для каждой линии.

Увеличение пропускных способностей транспортных линий требует значительных фиксированных затрат, не зависящих от объемов расширений линий (напр., затраты на проектирование и создание надлежащей инфраструктуры). Как следствие, отсутствие выпуклости и NP-трудность задачи.

Газовые проекты России



- Структура рынка соответствует графу типа «дерево».
- N - множество узлов.

$\forall i \in N$:

- $D_i(p_i)$ - функция спроса (невозрастающая функция, $\lim\limits_{p_i \to +\infty} D_i(p_i) = 0$), зависит от цены в узле;
- $S_i(p_i)$ - функция предложения (неубывающая функция, $S_i(0) = 0$), зависит от цены в узле.

Функции $D_i(p_i)$ взаимно однозначно соответствуют функциям полезности потребления $U_i(v_i^d)$, зависящим от объема потребления в узле:

$$D_i(p_i) = Arg\max_{v_i^d \geq 0}(U_i(v_i^d) - p_i v_i^d) = U_i'^{(-1)}(p_i); \quad U_i(v_i^d) = \int\limits_0^{v_i^d} D_i^{-1}(u)du.$$

Функции $S_i(p_i)$ взаимно однозначно соответствуют функциям производственных затрат $c_i(v_i)$, зависящим от объема производства в узле:

$$S_i(p_i) = Arg\max_{v_i \geq 0}(p_i v_i - c_i(v_i)) = (c_i')^{(-1)}(p_i); \quad c_i(v_i) = \int\limits_0^{v_i} S_i^{-1}(u)du.$$

Постановка задачи (Линии)

- $L \subseteq \{\{i,j\} | i,j \in N\}$ - множество линий.

$\forall \{i,j\} \in L$:

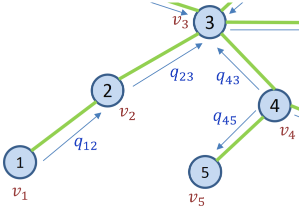
- $e^t_{ij} \geq 0$ - удельные затраты на передачу единицы товара;
- $Q^0_{ij} \geq 0$ - начальная пропускная способность;
- $E^f_{ij} \geq 0$ - фиксированные затраты на увеличение пропускной способности;
- $E^v_{ij}(\Delta Q_{ij})$ - функция переменных затрат на увеличение пропускной способности (неубывающая выпуклая функция, $E^v_{ij}(0) = 0$), зависит от объема расширения линии;
- $e^t_{ij} = e^t_{ji}$, $Q^0_{ij} = Q^0_{ji}$, $E^f_{ij} = E^f_{ji}$, $\Delta Q_{ij} = \Delta Q_{ji}$, $E^v_{ij}(\Delta Q_{ij}) \equiv E^v_{ji}(\Delta Q_{ji})$.

E^f_{ij} и $E^v_{ij}(\Delta Q_{ij})$ приведены к тому же интервалу времени, для которого рассчитываются функции $D_i(p_i)$ и $S_i(p_i)$.

Суммарные транспортные затраты для любой линии $\{i,j\} \in L$ складываются из затрат на передачу товара и затрат на расширение линии:

$$E_{ij}(q_{ij}) = \begin{cases} E^f_{ij} + E^v_{ij}(|q_{ij}| - Q^0_{ij}) + e^t_{ij}|q_{ij}|, & |q_{ij}| > Q^0_{ij}, \\ e^t_{ij}|q_{ij}|, & |q_{ij}| \leq Q^0_{ij}, \end{cases}$$

где q_{ij} - поток (объем передачи) из узла i в узел j. Если $q_{ij} < 0$, то передача осуществляется в обратном направлении. $q_{ji} = -q_{ij}$.



- v_i - объем производства в узле i;
- q_{ij} - поток из узла i в узел j (если $q_{ij} < 0$, то передача осуществляется в обратном направлении);
- $v_i^d = v_i - \sum_{j|\{i,j\}\in L} q_{ij}$ - объем потребления в узле i;
- $\vec{v} = (v_i, i \in N)$ - вектор объемов производства;
- $\vec{q} = (q_{ij}, \{i,j\} \in L, i < j)$ - вектор потоков;
- $\vec{v^d} = (v_i^d, i \in N)$ - вектор объемов потребления;

Определим общественное благосостояние как суммарную полезность потребления за вычетом суммарных затрат на производство и суммарных транспортных затрат:

$$W(\vec{q},\vec{v}) = \sum_{i\in N} U_i(v_i - \sum_{j|\{i,j\}\in L} q_{ij}) - \sum_{i\in N} c_i(v_i) - \sum_{\{i,j\}\in L, i<j} E_{ij}(q_{ij}).$$

Постановка задачи

Задача максимизации общественного благосостояния:

$$\max_{\vec{q},\vec{v}\geq 0} W(\vec{q},\vec{v}). \tag{1}$$

Из-за наличия фиксированной компоненты в функциях затрат на увеличение пропускной способности эта задача не является выпуклой.

Рассмотрим вспомогательную задачу с фиксированным множеством расширяемых линий $\overline{L} \subseteq L$:

$$\max_{\vec{q},\vec{v}\geq 0} W(\vec{q},\vec{v},\overline{L}), \tag{2}$$

которая отличается от задачи (1) тем, что $|q_{ij}| \leq Q^0_{ij}$ для $\{i,j\} \in L \setminus \overline{L}$, и фиксированная компонента E^f_{ij} всегда включена в $E_{ij}(q_{ij})$ для $\{i,j\} \in \overline{L}$.

Пусть $\widetilde{W}(\overline{L})$ - максимальное значение благосостояния в задаче (2). Тогда исходная задача (1) сводится к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий:

$$L^* \in Arg \max_{\overline{L}\subseteq L} \widetilde{W}(\overline{L}). \tag{3}$$

Пусть p_i - цена в узле i, $\vec{p} = (p_i, i \in N)$ - вектор цен. Обозначим через

$$\Delta S_i(p_i) = S_i(p_i) - D_i(p_i)$$

функцию чистого предложения в i-м узле.

Определение. Конкурентным равновесием рынка с фиксированным множеством $\overline{L}$ расширяемых линий называется такая совокупность векторов $\vec{p}$, $\vec{v}$ и $\vec{q}$, для которой выполняются следующие условия:

$\forall i \in N$

$$\begin{cases} v_i = S(p_i), \\ \Delta S_i(p_i) = \sum\limits_{j|\{i,j\} \in L} q_{ij}, \end{cases} \tag{4}$$

$\forall \{i,j\} \in L$

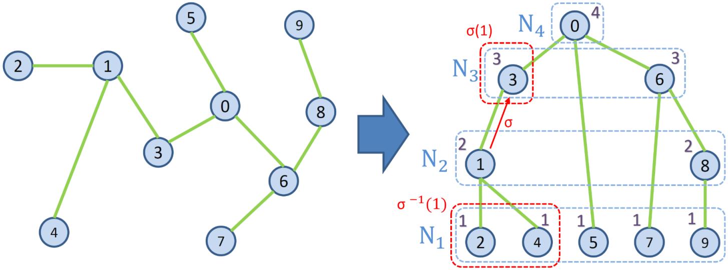
$$\begin{cases} q_{ij} = -Q^0_{ij}, & \text{если } p_j - p_i < -e^t_{ij}, & \{i,j\} \in L \setminus \overline{L}, \\ p_j - p_i = -e^t_{ij} + E^{v\prime}_{ij}(|q_{ij}| - Q^0_{ij}), & \text{если } q_{ij} < -Q^0_{ij}, & \{i,j\} \in \overline{L}, \\ q_{ij} \in [-Q^0_{ij}, 0], & \text{если } p_j - p_i = -e^t_{ij}, & \\ q_{ij} = 0, & \text{если } p_j - p_i \in (-e^t_{ij}, e^t_{ij}), & \\ q_{ij} \in [0, Q^0_{ij}], & \text{если } p_j - p_i = e^t_{ij}, & \\ p_j - p_i = e^t_{ij} + E^{v\prime}_{ij}(|q_{ij}| - Q^0_{ij}), & \text{если } q_{ij} > Q^0_{ij}, & \{i,j\} \in \overline{L}, \\ q_{ij} = Q^0_{ij}, & \text{если } p_j - p_i > e^t_{ij}, & \{i,j\} \in L \setminus \overline{L}. \end{cases} \tag{5}$$

В (Васин, Григорьева, Цыганов, 2017) сформулирован следующий результат, расширяющий теорему о благосостоянии (Arrow, Debreu, 1954) для сетевого рынка.

Теорема 1

Задача (2) - задача выпуклого программирования, а ее решение соответствует конкурентному равновесию рынка.

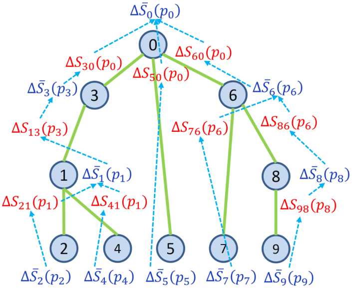
Решение вспомогательной задачи. Шаг 1. Упорядочивание вершин по уровням



Шаг 1

- Представим транспортную структуру рынка в виде корневого дерева минимальной высоты.
- Не ограничивая общности, считаем, что $0 \in N$ - корневая вершина дерева.
- $\forall i \in N$ обозначим через $Z(i)$ множество смежных вершин для вершины i.
- Пусть N_1 - множество финальных вершин, N_2 - множество предфинальных вершин, $N_k = \{i \in N \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} N_j \,|\, |Z(i) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} N_j| = 1\}$ - множество вершин k-го уровня, $k = 1, 2, \ldots, h$, $N_h = \{0\}$.
- $\forall i \in N$ обозначим через $\sigma(i)$ предшествущую вершину для вершины i.

Решение вспомогательной задачи. Шаг 2. Перенос баланса спроса и предложения в корневую вершину



Введем следующие функции:

- $\Delta\overline{S}_j(p_j)$ - баланс спроса и предложения в вершине j с учетом перетока из нижележащих вершин.
- $\Delta S_{ij}(p_j)$ - переток товара из вершины i в предшествующую ей вершину $j = \sigma(i)$ с учетом перетока из нижележащих вершин.

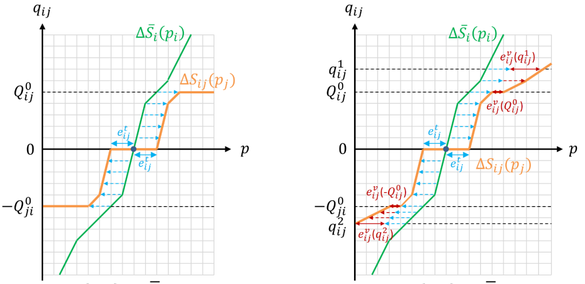
Шаг 2

- Последовательно двигаясь от финальных вершин к корневой, определяем функции $\Delta\overline{S}_j(p_j)$ и $\Delta S_{ij}(p_j)$. Шаг завершается построением функции $\Delta\overline{S}_0(p_0)$.

Подшаг 2.1

- Проходим финальные вершины. $\forall i \in N_1$ $\Delta\overline{S}_i(p_i) = \Delta S_i(p_i)$.

Решение вспомогательной задачи. Шаг 2. Перенос баланса спроса и предложения в корневую вершину



$\{i,j\} \notin \bar{L}$ $\qquad$ $\{i,j\} \in \bar{L}$

- $e^v_{ij}(q_{ij}) = E^{v\prime}_{ij}(|q_{ij}| - Q^0_{ij})$ - функция предельных затрат на увеличение пропускной способности линии $\{i,j\}$ в зависимости от потока из узла i в узел j.

Подшаг 2.l, l=2, ..., h

- Для каждой линии $\{i,j\} \in L$ такой, что $j \in N_l$, $i \in \sigma^{-1}(j)$, строим функцию $\Delta S_{ij}(p_j)$.
- Для каждой вершины $j \in N_l$ строим функцию $\Delta\overline{S}_j(p_j)$:

$$\Delta\overline{S}_j(p_j) = \Delta S_j(p_j) + \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} \Delta S_{ij}(p_j), \qquad (6)$$

Решение вспомогательной задачи. Шаг 2. Перенос баланса спроса и предложения в корневую вершину

Построение функции $\Delta S_{ij}\left(p_j\right)$:

- Пусть $\tilde{\overline{p}}_i$ - решение уравнения $\Delta\overline{S}_i(p_i) = 0$. Если $\{i,j\} \in \overline{L}$, то

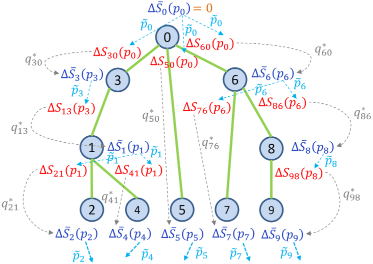
$$\Delta S_{ij}\left(p_j\right) = \begin{cases} 0, \ \tilde{\overline{p}}_i - e^t_{ij} < p_j < \tilde{\overline{p}}_i + e^t_{ij}, \\ \Delta\overline{S}_i(p_j - e^t_{ij}), \ \tilde{\overline{p}}_i + e^t_{ij} \le p_j < (\Delta\overline{S}_i)^{-1}(Q^0_{ij}) + e^t_{ij}, \\ Q^0_{ij}, \ (\Delta\overline{S}_i)^{-1}(Q^0_{ij}) + e^t_{ij} \le p_j \le (\Delta\overline{S}_i)^{-1}(Q^0_{ij}) + e^t_{ij} + e^v_{ij}(Q^0_{ij}), \\ \{q_{ij} | q_{ij} = \Delta\overline{S}_i(p_j - e^t_{ij} - e^v_{ij}(q_{ij}))\}, \ p_j > (\Delta\overline{S}_i)^{-1}(Q^0_{ij}) + e^t_{ij} + e^v_{ij}(Q^0_{ij}). \end{cases}$$

Если $\{i,j\} \notin \overline{L}$, то

$$\Delta S_{ij}\left(p_j\right) = \begin{cases} 0, \ \tilde{\overline{p}}_i - e^t_{ij} < p_j < \tilde{\overline{p}}_i + e^t_{ij}, \\ \Delta\overline{S}_i(p_j - e^t_{ij}), \ \tilde{\overline{p}}_i + e^t_{ij} \le p_j < (\Delta\overline{S}_i)^{-1}(Q^0_{ij}) + e^t_{ij}, \\ Q^0_{ij}, \ p_j \ge (\Delta\overline{S}_i)^{-1}(Q^0_{ij}) + e^t_{ij}. \end{cases}$$

Для случая $p_j \le \tilde{\overline{p}}_i - e^t_{ij}$ функция $\Delta S_{ij}(p_j) < 0$ определяется симметрично.

Решение вспомогательной задачи. Шаг 3. Определение равновесных цен и оптимальной стратегии



Подшаг 3.1

- Находим $\tilde{p}_0$ из уравнения $\Delta\overline{S}_0(\tilde{p}_0) = 0$.
- $v_0^* = S_0(\tilde{p}_0)$.

Подшаг 3.l, l=2, ..., h

Для каждой линии $\{i,j\}$ такой, что $j \in N_{h-l+2}$, $i \in N_{(h-l+1)} \bigcap \sigma^{-1}(j)$, находим:

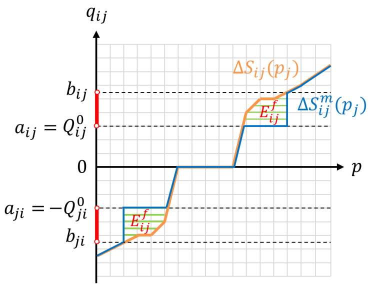
-
$$q_{ij}^* = \Delta S_{ij}(\tilde{p}_j), \quad \tilde{p}_i = (\Delta\overline{S_i})^{-1}(q_{ij}^*), \quad v_i^* = S_i(\tilde{p}_i). \tag{7}$$

Для случая кусочно-линейных функций ΔS_i и e_{ij}^v получена следующая оценка сложности.

Теорема 2

Описанный алгоритм находит решение вспомогательной задачи (2). Его сложность равна $O(|N|^2)$.

Алгоритм нахождения приближенного решения исходной задачи



- Данный алгоритм является модификацией алгоритма для вспомогательной задачи.
- Фиксированные затраты E^f_{ij} обнуляются.
- Предельные затраты увеличиваются и уравниваются в интервале от начальной пропускной способности Q^0_{ij} до некоторого значения b_{ij}, которое выбирается так, чтобы это увеличение полностью покрыло фиксированные затраты E^f_{ij}.
- $E^m_{ij}(q_{ij})$ - модифицированная функция транспортных затрат, $\Delta S^m_{ij}(p_j)$ и $\Delta \overline{S}^m_j(p_j)$ - модифицированные функции перетока и баланса соответственно, они используется в формуле (6).
- $E^m_{ij}(q_{ij}) = E_{ij}(q_{ij})$ вне интервалов (a_{ij}, b_{ij}), (b_{ji}, a_{ji}), которые называются **связными**.
- При движении вверх по дереву связные интервалы переходят в вышележащие вершины.
- Пусть $Int(i) = ((c^i_1, d^i_1), (c^i_2, d^i_2), ..., (c^i_{n(i)}, d^i_{n(i)}))$ - множество связных интервалов вершины i.

Алгоритм нахождения приближенного решения исходной задачи

The modified transfer is $\Delta S_{ij}^m(p) = (c_{ij}^m)^{-1}(p)$, and (a_{ij}, b_{ij}), (b_{ji}, a_{ji}) are called connected intervals of the transfer ΔS_{ij}^m. In the intervals, the marginal costs are increased and equalized (or, for $q < 0$, the marginal utility of the consumption is reduced) to cover the fixed cost of the transfer. Finally, the total S-D balance $\Delta \overline{S}_j^m(p_j)$ for $j \in N_2$ is defined according to (6) with substituting ΔS_{ij}^m for ΔS_{ij}.

For $\Delta \overline{S}_j^m$, the set of connected intervals is obtained by unification of such sets for ΔS_{ij}^m, $i \in \sigma^{-1}(j)$, with the corresponding shifts:

$$Int(j) = \{(\overline{a}_{ij}, \overline{b}_{ij}), (\overline{b}_{ji}, \overline{a}_{ji}), i \in \sigma^{-1}(j)\}, \text{where } \overline{a}_{ij} = a_{ij} + \Delta_{ij}(b_{ij}),$$

$$\overline{b}_{ij} = b_{ij} + \Delta_{ij}(b_{ij}),\ \overline{a}_{ji} = a_{ji} + \Delta_{ij}(b_{ji}),\ \overline{b}_{ji} = b_{ji} + \Delta_{ij}(b_{ji}),$$

$$\Delta_{ij}(v) = \sum_{r \in \sigma^{-1}(j) \setminus i} \Delta S_{rj}^m(p_{ij}(b_{ij})) + \Delta S_j(p_{ij}(b_{ij})),\ p_{ij}(v) = \Delta S_{ij}^{-1}(v).$$

As the final result of stage 2, the function $\Delta \overline{S}_0^m(p_0)$ and the set $Int(0)$ for the root node become determined.

At stage 3m, equilibrium prices $\overline{p}_i^m$ and the strategy $(\vec{v}^m, \vec{q}^m)$ are determined in line with stage 3 of the basic algorithm for problem (2), where the functions $\Delta \overline{S}_i^m$ and c_{ij}^m are used instead of $\Delta \overline{S}_i$ and c_{ij} at every substage.

Consider the social welfare function with modified transmission costs:

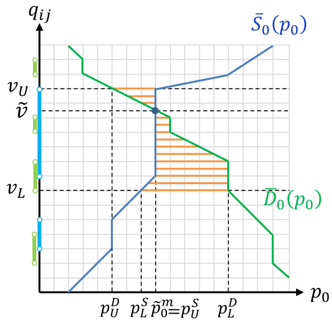
$$W^m(\vec{q}, \vec{v}) = \sum_{i \in N} [U_i(v_i + \sum_{l \in N(i)} q_{li}) - c_i(v_i)] - \sum_{(i,j) \in L,\ i<j} E_{ij}^m(q_{ij}).$$

Алгоритм нахождения приближенного решения исходной задачи

Theorem 3

(Vasin, Grigoryeva, Tsyganov, 2018) The strategy $(\overrightarrow{v}^m, \overrightarrow{q}^m)$*, determined by the modified algorithm, is a solution to the welfare optimization problem with the perturbed transmission cost functions* $E_{ij}^m(q_{ij})$*. If* $0 \notin \bigcup\limits_{k=1,\dots,n(0)} (c_k^0, d_k^0)$*, then* $(\overrightarrow{v}^m, \overrightarrow{q}^m)$ *is a solution to the general problem (1).*

Алгоритм нахождения приближенного решения исходной задачи



Now consider the case, where the equilibrium S-D balance $\Delta\overline{S}_0(\tilde{p}_0^m) = 0$ lies in some connected interval. At the beginning of stage 3m, we determine the equilibrium flows q_{i0} for $i \in \sigma^{-1}(0)$. Then the set $\sigma_D^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \sigma^{-1}(0) : q_{i0}^m < 0\}$ defines the set of consuming branches, and the set $\sigma_s^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \sigma^{-1}(0) : q_{i0}^m > 0\}$ defines the set of producing branches with respect to the root node. We determine the aggregated supply and demand at this node as follows: $\overline{S}_0(p) = S_0(p) + \sum_{i \in \sigma_S^{-1}(0)} \Delta S_{i0}(p)$, $\overline{D}_0(p) = D_0(p) - \sum_{i \in \sigma_D^{-1}(0)} \Delta S_{i0}(p)$. Then the connected intervals for the both functions, the equilibrium volume $\tilde{v}$ and the equilibrium price for the root node are obtained similarly to the given modified algorithm (see Fig., connected intervals correspond to the vertical stretches).

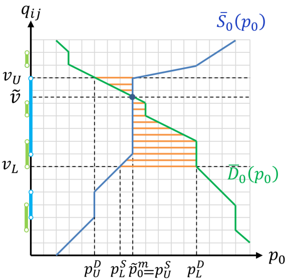
The case where $\tilde{v}$ does not belong to any connected interval is covered by Theorem 3. Otherwise, the following method for determining approximate solutions is proposed. Denote $\{(c^k_{0\overline{S}}, d^k_{0\overline{S}}), k = 1,..,n(\overline{S}_0)\}$ as the set of connected intervals for the aggregated supply, $\{(c^k_{0\overline{D}}, d^k_{0\overline{D}}), k = 1,..,n(\overline{D}_0)\}$ — as an analogous set for the aggregated demand. Let

$$v_L \stackrel{\text{def}}{=} max\{v \in [0, \widetilde{v}) | v \notin \cup_k (c^k_{0\overline{S}}, d^k_{0\overline{S}}) \vee \cup_k (c^k_{0\overline{D}}, d^k_{0\overline{D}})\},$$

$$v_u \stackrel{\text{def}}{=} min\{v > \widetilde{v} | v \notin \cup_k (c^k_{0\overline{S}}, d^k_{0\overline{S}}) \vee \cup_k (c^k_{0\overline{D}}, d^k_{0\overline{D}})\}.$$

So these are the closest to $\widetilde{v}$ upper and lower volumes that do not belong to any connected interval. For the first approximate solution, we determine the prices $p^S_L = \overline{S}_0^{-1}(v_L)$ and $p^D_L = \overline{D}_0^{-1}(v_L)$ (see Fig.). Then we set the production volumes v^L_i and the flows q^L_{i0} in every producing node $i \in \sigma_S^{-1}(0)$, employing relations (7), but using p^S_L instead of $\tilde{p}_0$. We continue to determine $q^L_{i\sigma(i)}$ and v^L_i according to (7) in all following nodes in these branches. There is no need to modify the procedure since v_L does not belong to any connected interval, and hence, for every i, $q^L_{i\sigma(i)}$ also does not belong to any such an interval for $\Delta\overline{S}^m_{i\sigma(i)}$. Then, proceeding from the price p^D_L, the method determines the flows q^L_{i0} and production volumes v^L_i in every consuming node $i \in \sigma_D^{-1}(0)$ and successively determines $q^L_{i\sigma(i)}$ and v^L_i for all following nodes i in the consuming branches. For the second approximate solution to the problem, we employ the volume v_U and the corresponding prices p^S_U and p^D_U in determining the volumes v^U_i, $q^U_{i\sigma(i)}$ for the producing and consuming branches.

Алгоритм нахождения приближенного решения исходной задачи



Theorem 4

For the given approximate solutions, the welfare losses meet the following estimates (see Fig.):

$$W^* - W(\overrightarrow{v}^L, \overrightarrow{q}^L) \leq \int_{v^L}^{\tilde{v}} (\overline{D}_0^{-1}(v) - \overline{S}_0^{-1}(v))dv,$$

$$W^* - W(\overrightarrow{v}^U, \overrightarrow{q}^U) \leq \int_{\tilde{v}}^{v^U} (\overline{S}_0^{-1}(v) - \overline{D}_0^{-1}(v))dv.$$

Задача поиска оптимального множества расширяемых линий:

$$L^* \in Arg \max_{\overline{L} \subseteq L} \widetilde{W}(\overline{L}).$$

Определение. Линия l называется дополнительной (соответственно конкурентной) к линии r, если $\forall M \subseteq L \setminus \{l, r\}$ выполнено

$$\widetilde{W}((M \cup \{l\}) \cup \{r\}) - \widetilde{W}(M \cup \{l\}) \ \geq (\leq) \ \widetilde{W}(M \cup \{r\}) - \widetilde{W}(M).$$

Пусть $L_+(l)$ и $L_-(l)$ - множества дополнительных и конкурентных линий к линии l соответственно. В таком случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 5

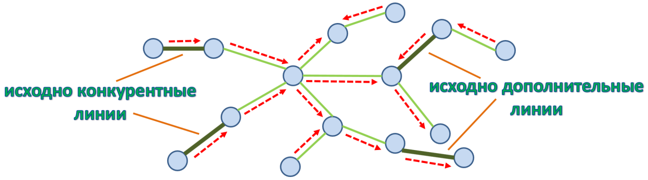
Разность $\widetilde{W}(L_+ \cup L_- \cup \{l\}) - \widetilde{W}(L_+ \cup L_-)$ не убывает по множеству $L_+ \subseteq L_+(l)$ и не возрастает по множеству $L_- \subseteq L_-(l)$.

Если для каждой линии $l \in L$ можно определить $L_+(l)$, $L_-(l)$ и $L_+(l) \cup L_-(l) = L \setminus \{l\}$, то теорема 5 позволяет отбраковывать некоторые заведомо неоптимальные множества $\overline{L} \subseteq L$. Возможность установить полные отношения дополнительности и конкурентности тесно связана с условием инвариантности структуры потока, определяемым ниже.

Для любого вектора $\vec{Q}$ пропускных способностей рассмотрим исходный рынок с $\vec{Q}^0 = \vec{Q}$ и без возможности увеличение пропускных способностей. Обозначим через $\vec{p}(\vec{Q})$ равновесные цены, соответствующие такому рынку. $\vec{p}(\vec{Q})$ находится из системы (4)-(5).

Определение. Данная модель рынка удовлетворяет условию инвариантности структуры потока (УИСП), если $\forall \ \vec{Q} \geq \vec{Q}^0 \ \forall \ \{i,j\} \in L \ sign(p_j(\vec{Q}) - p_i(\vec{Q})) = sign(p_j(\vec{Q}^0) - p_i(\vec{Q}^0))$.

Основная задача. Дополнительные и конкурентные линии. УИСП



Рассмотрим любые две линии l и r, $l \neq r$. Рассмотрим граф (N, L), задающий структуру исходного рынка. В нем существует единственный путь $L(l, r)$ без самопересечений, начинающийся с l и заканчивающийся r.

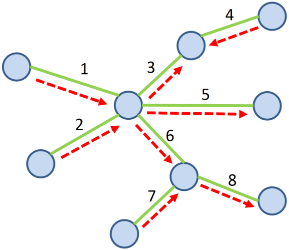
Определение. Линия r называется исходно дополнительной (соответственно исходно конкурентной) к линии l, если при начальных пропускных способностях $\vec{Q}^0$ потоки на этих линиях имеют одинаковые (соответственно противоположные) направления относительно пути $L(l, r)$.

Пусть $L^0_+(l)$, $L^0_-(l)$ - множества исходно дополнительных и исходно конкурентных линий к l соответственно.

Теорема 6

Рынок типа «дерево» удовлетворяет УИСП тогда и только тогда, когда $\forall l = \{i, j\}$ $sign(p_j(\vec{Q}^0) - p_i(\vec{Q}^0)) = sign(p_j(\vec{Q}^0_{L^0_+(l)}, \vec{Q}^\infty_{L^0_-(l)}) - p_i(\vec{Q}^0_{L^0_+(l)}, \vec{Q}^\infty_{L^0_-(l)}))$, *где* $\vec{Q}_{L^0_+(l)}$ *и* $\vec{Q}_{L^0_-(l)}$ - *проекции вектора* $\vec{Q}$ *на соответствующие подпространства, а* $\vec{Q}^\infty$ - *вектор, все компоненты которого равны плюс бесконечности. При этом условии* $\forall l$ $L_+(l) = L^0_+(l)$, $L_-(l) = L^0_-(l)$.

Основная задача. Пример использования дополнительных и конкурентных линий



Рассмотрим пример использования теоремы 5. Пусть выполняется УИСП. Направления потоков обозначены красными стрелками. Выпишем условие, при котором включение линии 1 в множество расширяемых линий заведомо оптимально.

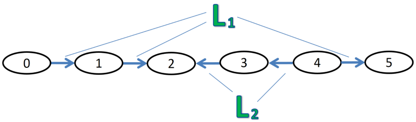
- $L_+(1) = \{3,5,6,8\}$ - множество дополнительных линий для линии 1.
- $L_-(1) = \{2,4,7\}$ - множество конкурентных линий для линии 1.

Условие, при котором расширение линии 1 заведомо оптимально:

$$\widetilde{W}(\{2,4,7\}) \leq \widetilde{W}(\{1,2,4,7\}).$$

Симметричное условие, при котором отсутствие расширения линии 1 заведомо оптимально:

$$\widetilde{W}(\{1,3,5,6,8\}) \leq \widetilde{W}(\{3,5,6,8\}).$$



- $N = \{0, 1, 2, ..., m\}$ - множество узлов;
- $L = \{\{0,1\},\{1,2\},...,\{m-1,m\}\}$ - множество линий.

Пусть выполняется УИСП. Разобьем множество линий L на 2 подмножества:

- $L_1 = \{\{i, i+1\} \subseteq L |\ p_i(\vec{Q}^0) \leq p_{i+1}(\vec{Q}^0)\}$ - линии с направлениями потоков слева направо (I тип),
- $L_2 = \{\{i, i+1\} \subseteq L |\ p_i(\vec{Q}^0) > p_{i+1}(\vec{Q}^0)\}$ - линии с направлениями потоков справа налево (II тип).

Две произвольные линии $l, r \in L$, $l \neq r$ находятся в следующих отношениях:

- l и r - взаимно дополнительные, если $l \in L_1, r \in L_1$ или $l \in L_2, r \in L_2$,
- l и r - взаимно конкурентные, если $l \in L_1, r \in L_2$ или $l \in L_2, r \in L_1$.

Основная идея алгоритма нахождения оптимального множества L^*:

- Оптимальное множество расширяемых линий L^* представимо в виде объединения двух подмножеств: $L_1^* = L^* \cap L_1$ и $L_2^* = L^* \cap L_2$.
- Алгоритм работает с нижней L_1^{min} и верхней L_1^{max} оценками множества L_1^*, а также с нижней L_2^{min} и верхней L_2^{max} оценками множества L_2^*. Таким образом, всегда справедливы соотношения $L_1^{min} \subseteq L_1^* \subseteq L_1^{max}$, $L_2^{min} \subseteq L_2^* \subseteq L_2^{max}$. На каждом шаге алгоритма производятся попытки уточнения этих оценок.
- Если линию удалось включить в нижнюю оценку или исключить из верхней оценки, то говорим, что линия **определена**.

Для любого множества $\overline{L} \subseteq L$ обозначим $L_1(\overline{L}) = L_1 \cap \overline{L}$, $L_2(\overline{L}) = L_2 \cap \overline{L}$. Работа алгоритма основана на следующем утверждении, справедливость которого следует из теоремы 5.

Теорема 7

Пусть L_1^{min} и L_1^{max} - текущие нижняя и верхняя оценки множества L_1^* соответственно, а L_2^{min} и L_2^{max} - текущие нижняя и верхняя оценки множества L_2^* соответственно. Пусть $S_1 \subseteq L_1^{max} \setminus L_1^{min}$, $S_2 \subseteq L_2^{max} \setminus L_2^{min}$, $S = S_1 \cup S_2$.
I. Если выполняются следующие неравенства:

$$\widetilde{W}((L_1^{min} \cup S_1) \cup (L_2^{max} \setminus S_2)) \geq \widetilde{W}(L_1^{min} \cup L_2^{max}),$$

$$\widetilde{W}((L_1^{min} \cup L_1(R)) \cup (L_2^{max} \setminus L_2(R))) < \widetilde{W}(L_1^{min} \cup L_2^{max})$$

для любого непустого множества $R \subset S$, то уточненная нижняя оценка L_{1r}^{min} и верхняя оценка L_{2r}^{max} определяются следующим образом: $L_{1r}^{min} = L_1^{min} \cup S_1$, $L_{2r}^{max} = L_2^{max} \setminus S_2$.
II. Если выполняются следующие неравенства:

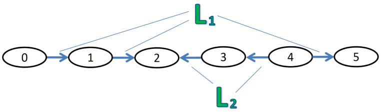
$$\widetilde{W}((L_1^{max} \setminus S_1) \cup (L_2^{min} \cup S_2)) \geq \widetilde{W}(L_1^{max} \cup L_2^{min}),$$

$$\widetilde{W}((L_1^{max} \setminus L_1(R)) \cup (L_2^{min} \cup L_2(R))) < \widetilde{W}(L_1^{max} \cup L_2^{min})$$

для любого непустого множества $R \subset S$, то уточненная верхняя оценка L_{1r}^{max} и нижняя оценка L_{2r}^{min} определяются следующим образом: $L_{1r}^{max} = L_1^{max} \setminus S_1$, $L_{2r}^{min} = L_2^{min} \cup S_2$.

- На каждом шаге алгоритма выполняется одно из следующих двух действий:
  1. попытка расширения текущего множества L_1^{min} и сужения текущего множества L_2^{max} (шаг первого типа);
  2. попытка сужения текущего множества L_1^{max} и расширения текущего множества L_2^{min} (шаг второго типа).

Рынок типа «цепочка». Алгоритм



- Сначала полагаем, что все линии $l \in L$ являются неопределенными, т.е. $L_1^{min} = L_2^{min} = \emptyset$, $L_1^{max} = L_1$, $L_2^{max} = L_2$.
- Затем для каждой неопределенной линии $l \in L$ производится попытка ее включения в нижнюю оценку или исключения из верхней оценки.

  Для включения линии $l \in L$ рассматривается «наихудший» для этой линии случай: среди неопределенных линий только конкурентные линии расширяются. Если для такого случая расширение линии l выгодно, то эта линия включается в нижнюю оценку.

  Для исключения линии $l \in L$ рассматривается «наилучший» для этой линии случай: среди неопределенных линий только дополнительные линии расширяются. Если для такого случая отсутствие расширения линии l выгодно, то эта линия исключается из верхней оценки.

  При успешном определении некоторой линии производятся попытки определения других линий с уже измененными нижними и верхними оценками.
- Если больше не удается определить отдельные линии, то рассматриваются уже всевозможные пары неопределенных линий. Для взаимно дополнительных линий производятся попытки одновременного включения обеих линий в нижнюю оценку или одновременного исключения обеих линий из верхней оценки.

  Для взаимно конкурентных линий производятся попытки одновременного включения первой линии в нижнюю оценку и исключения второй линии из верхней оценки, и наоборот.
- Если отдельные линии и пары линий определить не удается, то рассматриваются тройки линий, затем четверки линий и т.д.
- Если на каком-то шаге удалось провести включение линий первого типа и исключение линий второго типа, то тогда после корректировки оценок можно повторить попытки включения отдельных линий первого типа или исключения отдельных линий второго типа, и наоборот.
- Алгоритм завершает работу, как только все линии будут определены.

Какова сложность предложенного алгоритма? Сколько подзадач (2) приходится решать?

- Теоретически число решаемых подзадач (2) может расти экспоненциально при увеличении числа узлов.
- Проведен численный эксперимент для оценки зависимости числа решаемых подзадач от числа узлов. В ходе эксперимента для заданного числа узлов (от 1 до 65) программа генерировала удовлетворяющие УИСП рынки и применяла описанный алгоритм поиска оптимального множества расширяемых линий L^* (по 1000 задач для каждого числа узлов).

Рынок типа «цепочка». Статистическая оценка алгоритма

Генерировались рынки с функциями следующих типов:

- Кусочно-линейные функции спроса и предложения:

$$D_i(p_i) = \begin{cases} d_i^f - \frac{1}{2} c_i p_i, & p_i \le 2\frac{d_i^f}{c_i}, \\ 0, & p_i > 2\frac{d_i^f}{c_i}, \end{cases} \qquad S_i(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} c_i p_i, & p_i \le 2\frac{d_i^f}{c_i}, \\ -d_i^f + c_i p_i, & p_i > 2\frac{d_i^f}{c_i}, \end{cases}$$

  которым соответствуют линейные функции $\Delta S_i(p) = -d_i^f + c_i p_i$.
- Квадратичные функции переменных затрат на увеличение пропускной способности:

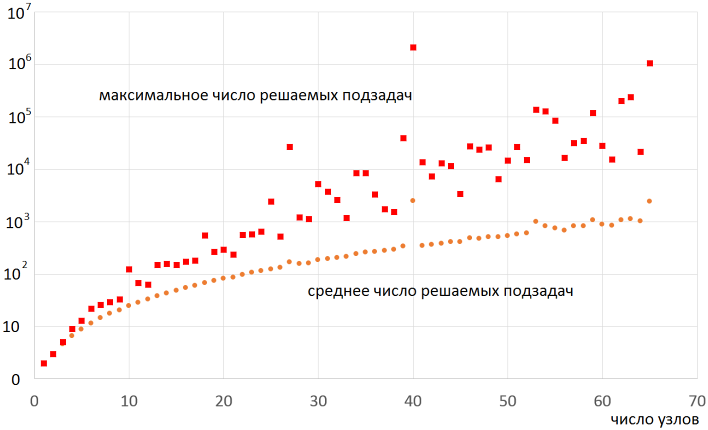
$$E^v_{i,i+1}(\Delta Q_{i,i+1}) = e^q_{i,i+1} \Delta Q^2_{i,i+1}.$$

Пусть $\Delta p_i = p_{i+1}(\vec{0}) - p_i(\vec{0})$ - разница между равновесными ценами в узлах в случае отсутствия передачи, $p_{min} = \min\limits_{i \in N} p_i(\vec{0})$ - минимальная цена в случае отсутствия передачи.

Исходный рынок полностью определяется следующими параметрами: m, p_{min}, d_i^f $(i \in N)$, Δp_i, $Q^0_{i,i+1}$, $e^t_{i,i+1}$, $e^q_{i,i+1}$, $e^f_{i,i+1}$ $(i = 0, ..., m-1)$. Параметры p_{min}, d_i^f, $|\Delta p_i|$, $e^t_{i,i+1}$, $e^q_{i,i+1}$, $e^f_{i,i+1}$ выбираются случайно и имеют равномерное распределение. $Q^0_{i,i+1}$ равно 0 для всех линий. Для любого узла $i = 1, ..., m-1$, знак Δp_i равен знаку Δp_{i-1} с вероятностью 0.9.

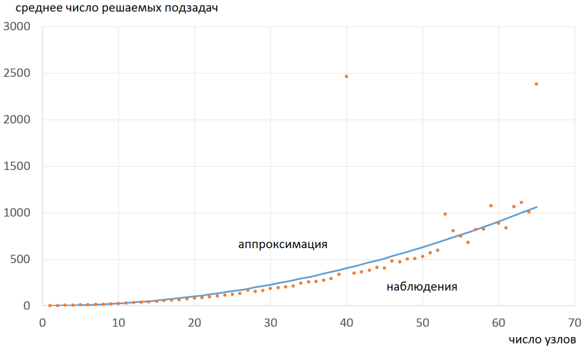
Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение
p_{min}	0	10
d_i^f	10	20
$\lvert\Delta p_i\rvert$	0	10
$e^t_{i,i+1}$	0	4
$e^q_{i,i+1}$	0	4
$e^f_{i,i+1}$	0	4

Рынок типа «цепочка». Статистическая оценка алгоритма



Среднее (нижние наблюдения) и максимальное (верхние наблюдения) числа решаемых подзадач в логарифмической шкале

Рынок типа «цепочка». Статистическая оценка алгоритма



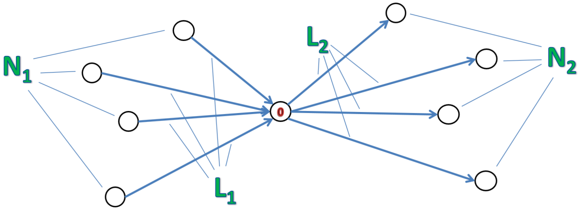
- x - число узлов;
- y_{av} - среднее число решаемых подзадач.

Методом наименьших квадратов получена следующая аппроксимация:

$$y_{av} = 0.25142x^2 + 1.77108$$

Соответствующий коэффициент детерминации R^2 равен 0.6357. На рисунке представлена полученная аппроксимация.

Рынок типа «звезда»



Рассмотрим рынок, состоящий из центрального узла 0 и множества узлов, соединенных с центральным узлом. Пусть выполняется УИСП. Разобьем множество всех линий L на множества L_1 с направлениями потоков к центральному узлу и L_2 с направлениями потоков от центрального узла. Пусть $N_1 = \{i \in N | \{i, 0\} \in L_1\}$, $N_2 = \{i \in N | \{0, i\} \in L_2\}$. В таком случае две произвольные линии $l, r \in L$, $l \neq r$ находятся в следующих отношениях:

- l и r - взаимно дополнительные, если $l \in L_1, r \in L_2$ или $l \in L_2, r \in L_1$,
- l и r - взаимно конкурентные, если $l \in L_1, r \in L_1$ или $l \in L_2, r \in L_2$.

Первый этап алгоритма нахождения оптимального множества L^* (включение и исключение линий):

- Подобно алгоритму для рынка типа «цепочка», производятся попытки включения и исключения линий.
- Алгоритм работает с множеством включенных линий $L^{in} \subseteq L$ и множеством исключенных линий $L^{ex} \subseteq L$, которые в ходе работы алгоритма уточняются.
- Вначале полагаем, что $L^{in} = L^{ex} = \emptyset$.
- Линии, расширение которых заведомо оптимально при текущих L^{in} и L^{ex}, включаются в множество L^{in}.
- Линии, для которых отсутствие расширения заведомо оптимально при текущих L^{in} и L^{ex}, включаются в множество L^{ex}.
- Как только выполняется условие $L^{in} \cup L^{ex} = L$, алгоритм прекращает работу. В этом случае полагаем, что $L^* = L^{in}$.

Рынок типа «звезда»

Однако что делать, если при текущих L^{in} и L^{ex} больше не удается включить или исключить ни одну линию, а $L^{in} \cap L^{ex} \neq \emptyset$?

Рассмотрим обобщенную задачу нахождения оптимального множества расширяемых линий при фиксированных множествах $L^{in} \subseteq L$ и $L^{ex} \subseteq L$, $L^{in} \cap L^{ex} = \varnothing$. Множество неопределенных линий равно $\widetilde{L} = L \setminus L^{in} \setminus L^{ex}$. Таким образом, для заданной пары $\mathscr{L} = \{L^{in}, L^{ex}\}$ задача имеет следующий вид:

$$L^*(\mathscr{L}) \to \max_{\overline{L}:\ L^{in} \subseteq \overline{L} \subseteq L \setminus L^{ex}} \widetilde{W}(\overline{L}) \tag{8}$$

Сложность полного перебора для такой задачи равна $2^{|\widetilde{L}|}$. Исходная задача является частным случаем задачи (8) при $L^{in} = L^{ex} = \emptyset$.

Обозначим для любой линии $l \in L$ множество дополнительных линий через $L_+(l)$, а множество конкурентных линий через $L_-(l)$.

Для любой линии $l \in L$ и любого множества $S \subseteq L$, обозначим, $S_+(l) = L_+(l) \cap S$, $S_-(l) = L_-(l) \cap S$. Для включения и исключения линий в задаче (8) используется следующая теорема, которая является следствием теоремы 5.

Теорема 8

Если линия $l \in \widetilde{L}$ удовлетворяет неравенству

$$\widetilde{W}(L^{in} \cup \widetilde{L}_-(l)) \leq \widetilde{W}(L^{in} \cup \widetilde{L}_-(l) \cup \{l\}), \tag{9}$$

то тогда расширение линии l заведомо оптимально и $l \in L^*(\mathscr{L})$ для некоторого решения $L^*(\mathscr{L})$ задачи (8), а если она удовлетворяет неравенству

$$\widetilde{W}(L^{in} \cup \widetilde{L}_+(l) \cup \{l\}) \leq \widetilde{W}(L^{in} \cup \widetilde{L}_+(l)), \tag{10}$$

то тогда отсутствие расширения линии l заведомо оптимально и $l \notin L^*(\mathscr{L})$ для некоторого решения $L^*(\mathscr{L})$ задачи (8).

Рынок типа «звезда». Импликации

Определение. Пусть $(l,r) \in \widetilde{L} \times \widetilde{L}$, $l \neq r$ - любая пара неопределенных линий. Определим через $(\mathscr{L}, l \Rightarrow r)$ импликацию «если для некоторого решения $L^*(\mathscr{L})$ задачи (8) $l \in L^*(\mathscr{L})$, то $r \in L^*(\mathscr{L})$». Аналогично, определим через $(\mathscr{L}, \backslash l \Rightarrow \backslash r)$ импликацию «если для некоторого решения $L^*(\mathscr{L})$ задачи (8) $l \notin L^*(\mathscr{L})$, то $r \notin L^*(\mathscr{L})$». Еще две импликации, $(\mathscr{L}, l \Rightarrow \backslash r)$ и $(\mathscr{L}, \backslash l \Rightarrow r)$, определяются аналогично.

Поиск импликаций проводится согласно следующей теореме.

Теорема 9

Для любой пары неопределенных линий $(l,r) \in \widetilde{L} \times \widetilde{L}$, $l \neq r$, импликация $(\mathscr{L}, l \Rightarrow r)$ выполняется, если справедливо неравенство

$$\widetilde{W}(\widetilde{L}_-(r) \cup L^{in} \cup \{l\}) < \widetilde{W}(\widetilde{L}_-(r) \cup L^{in} \cup \{l,r\}); \tag{11}$$

импликация $(\mathscr{L}, \backslash l \Rightarrow \backslash r)$ выполняется, если справедливо неравенство

$$\widetilde{W}(\widetilde{L}_+(r) \cup L^{in} \setminus \{l\} \cup \{r\}) < \widetilde{W}(\widetilde{L}_+(r) \cup L^{in} \setminus \{l\}); \tag{12}$$

импликация $(\mathscr{L}, l \Rightarrow \backslash r)$ выполняется, если справедливо неравенство

$$\widetilde{W}(\widetilde{L}_+(r) \cup L^{in} \cup \{l,r\}) < \widetilde{W}(\widetilde{L}_+(r) \cup L^{in} \cup \{l\}); \tag{13}$$

импликация $(\mathscr{L}, \backslash l \Rightarrow r)$ выполняется, если справедливо неравенство

$$\widetilde{W}(\widetilde{L}_-(r) \cup L^{in} \setminus \{l\}) < \widetilde{W}(\widetilde{L}_-(r) \cup L^{in} \setminus \{l\} \cup \{r\}). \tag{14}$$

Обозначим через $I(\mathscr{L})$ множество всех справедливых импликаций для заданных множеств L^{in} и L^{ex}. Для того чтобы найти $I(\mathscr{L})$, необходимо решить $O(|\widetilde{L}|^2)$ подзадач.

Шаг A. Определяем исходные множества L^{in}, L^{ex}, $\widetilde{L} = L \setminus L^{in} \setminus L^{ex}$.

Шаг B. Для каждой неопределенной линии $l \in \widetilde{L}$ последовательно проверяем неравенства (9) для добавления линии и (10) для исключения линии, и если какое-то из них выполнилось, то меняем множества: $L^{in} := L^{in} \cup \{l\}$ ($L^{ex} := L^{ex} \cup \{l\}$ соответственно), $\widetilde{L} := \widetilde{L} \setminus \{l\}$. Мы повторяем этот шаг, пока либо не выполнится $\widetilde{L} = \emptyset$ (тогда мы останавливаемся, и решение найдено: $L^* := L^{in}$), либо нельзя больше определить ни одну линию из $\widetilde{L}$. В таком случае переходим к следующему шагу.

Шаг C. Строим множество импликаций $I(\mathscr{L})$, для чего для каждой пары неопределенных линий $(l,r) \in \widetilde{L} \times \widetilde{L}$, $l \neq r$, проверяются импликации $(\mathscr{L}, l \Rightarrow r)$, $(\mathscr{L}, \backslash l \Rightarrow \backslash r)$ с помощью неравенств (11),(12), если l и r взаимно дополнительные, и импликации $(\mathscr{L}, l \Rightarrow \backslash r)$, $(\mathscr{L}, \backslash l \Rightarrow r)$ с помощью неравенств (13),(14), если l и r взаимно конкурентные. Если неравенство выполнилось, то в множество $I(\mathscr{L})$ добавляем соответствующую импликацию вместе с эквивалентной ей импликацией. Например, для $(\mathscr{L}, l \Rightarrow r)$ такой является $(\mathscr{L}, \backslash r \Rightarrow \backslash l)$, а для $(\mathscr{L}, l \Rightarrow \backslash r)$ - $(\mathscr{L}, r \Rightarrow \backslash l)$.

Обозначим через $\bar{I}(\mathscr{L})$ транзитивное замыкание множества $I(\mathscr{L})$. Например, если $I(\mathscr{L}) = \{(\mathscr{L}, 1 \Rightarrow 3), (\mathscr{L}, \backslash 3 \Rightarrow \backslash 1), (\mathscr{L}, 3 \Rightarrow \backslash 5), (\mathscr{L}, 5 \Rightarrow \backslash 3)\}$, то $\bar{I}(\mathscr{L}) = I(\mathscr{L}) \cup \{(\mathscr{L}, 1 \Rightarrow \backslash 5), (\mathscr{L}, 5 \Rightarrow \backslash 1)\}$.

Рынок типа «звезда». Алгоритм решения задачи (8)

Для любой неопределенной линии $l \in \widetilde{L}$ определим через $S_{in}^{in}(\mathscr{L},l)$ и $S_{in}^{ex}(\mathscr{L},l)$ множества заведомо включаемых и заведомо исключаемых линий при включении линии l:

$$S_{in}^{in}(\mathscr{L},l) = \{r \in \widetilde{L} \mid (\mathscr{L},l \Rightarrow r) \in \overline{I}(\mathscr{L})\} \cup \{l\}, \quad S_{in}^{ex}(\mathscr{L},l) = \{r \in \widetilde{L} \mid (\mathscr{L},l \Rightarrow \backslash r) \in \overline{I}(\mathscr{L})\}.$$

При этом если эти множества имеют непустое пересечение, то это приводит к противоречию, что означает, что линия l не может принадлежать никакому оптимальному множеству. Аналогично определяются множества $S_{ex}^{in}(\mathscr{L},l)$ и $S_{ex}^{ex}(\mathscr{L},l)$ заведомо включаемых и заведомо исключаемых линий при исключении линии l:

$$S_{ex}^{in}(\mathscr{L},l) = \{r \in \widetilde{L} \mid (\mathscr{L},\backslash l \Rightarrow r) \in \overline{I}(\mathscr{L})\}, \quad S_{ex}^{ex}(\mathscr{L},l) = \{r \in \widetilde{L} \mid (\mathscr{L},\backslash l \Rightarrow \backslash r) \in \overline{I}(\mathscr{L})\} \cup \{l\}.$$

Обозначим, $S_{in}(\mathscr{L},l) = S_{in}^{in}(\mathscr{L},l) \cup S_{in}^{ex}(\mathscr{L},l)$, $S_{ex}(\mathscr{L},l) = S_{ex}^{in}(\mathscr{L},l) \cup S_{ex}^{ex}(\mathscr{L},l)$ - множества заведомо определяемых линий при включении (исключении) линии l. Обозначим через $c_{in}(\mathscr{L},l)$ и $c_{ex}(\mathscr{L},l)$ сложности полного перебора для измененной задачи с включенной линией l и с исключенной линией l соответственно:

$$c_{in}(\mathscr{L},l) = \begin{cases} 2^{|\widetilde{L} \backslash S_{in}(\mathscr{L},l)|}, & S_{in}^{in}(\mathscr{L},l) \cap S_{in}^{ex}(\mathscr{L},l) = \emptyset, \\ 0, & S_{in}^{in}(\mathscr{L},l) \cap S_{in}^{ex}(\mathscr{L},l) \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$c_{ex}(\mathscr{L},l) = \begin{cases} 2^{|\widetilde{L} \backslash S_{ex}(\mathscr{L},l)|}, & S_{ex}^{in}(\mathscr{L},l) \cap S_{ex}^{ex}(\mathscr{L},l) = \emptyset, \\ 0, & S_{ex}^{in}(\mathscr{L},l) \cap S_{ex}^{ex}(\mathscr{L},l) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Затем находим линию l, для которой суммарная сложность полного перебора для двух измененных задач с включенной линией l и с исключенной линией l минимальна:

$$l^*(\mathscr{L}) = \operatorname*{Arg\,min}_{l \in \widetilde{L}} (c_{in}(\mathscr{L},l) + c_{ex}(\mathscr{L},l)),$$

и переходим к следующему шагу.

Шаг D. Рассмотрим две измененные задачи для $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{in}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L}))$ и $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{ex}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L}))$:

$$\mathscr{L}_{in}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L})) = (L^{in} := L^{in} \cup S^{in}_{in}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L})), L^{ex} := L^{ex} \cup S^{ex}_{in}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L}))),$$

$$\mathscr{L}_{ex}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L})) = (L^{in} := L^{in} \cup S^{in}_{ex}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L})), L^{ex} := L^{ex} \cup S^{ex}_{ex}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L}))).$$

Если для обеих задач $L^{in} \cap L^{ex} = \emptyset$, то решаем обе эти задачи (по возможности параллельно), для чего рекурсивно применяем описанный алгоритм. Пусть L^*_{in} - решение задачи $\mathscr{L}_{in}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L}))$, а L^*_{ex} - решение задачи $\mathscr{L}_{ex}(\mathscr{L}, l^*(\mathscr{L}))$. Тогда решение задачи (8) имеет следующий вид:

$$L^*(\mathscr{L}) = \operatorname*{Arg\,max}_{L^{in} \in \{L^*_{in}, L^*_{ex}\}} \widetilde{W}(L^{in}).$$

Если же для одной из задач $L^{in} \cap L^{ex} \neq \emptyset$, то тогда решается только вторая задача, и решение задачи (8) совпадает с решением этой задачи.

Рынок типа «звезда». Статистическая оценка алгоритма

По сравнению с полным перебором, описанный алгоритм позволяет значительно сократить число решаемых подзадач (2) и время решения исходной задачи (1). Для оценки числа решаемых подзадач в зависимости от числа узлов проведен численный эксперимент для рынка с кусочно-линейными функциями спроса и предложения:

$$D_i(p_i) = \begin{cases} d_i^f - \frac{1}{2} c_i p_i, & p_i \le 2\frac{d_i^f}{c_i}, \\ 0, & p_i > 2\frac{d_i^f}{c_i}, \end{cases} \qquad S_i(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} c_i p_i, & p_i \le 2\frac{d_i^f}{c_i}, \\ -d_i^f + c_i p_i, & p_i > 2\frac{d_i^f}{c_i}, \end{cases}$$

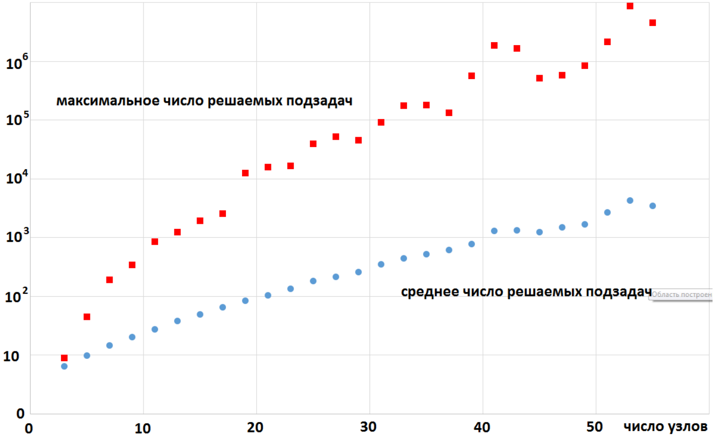
которым соответствуют линейные функции $\Delta S_i(p) = -d_i^f + c_i p_i$, и квадратичными функциями переменных затрат на увеличение пропускной способности:

$$E_{i0}^v(\Delta Q_{i0}) = e_{i0}^q \Delta Q_{i0}^2.$$

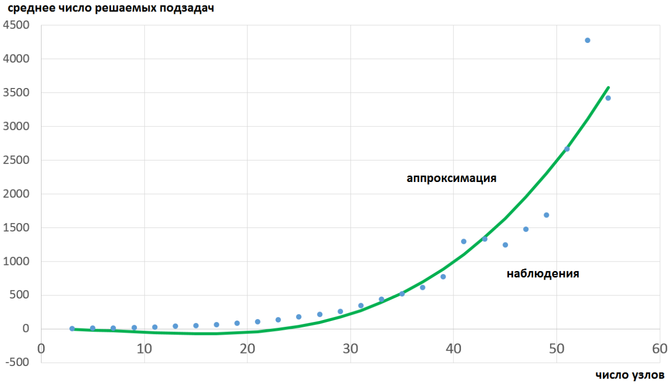
Пусть $\Delta p_i = p_0(\vec{0}) - p_i(\vec{0})$, $i \in N \setminus \{0\}$, - разница между равновесными ценами в узлах i и 0 в случае отсутствия передачи, $p_{min} = \min\limits_{i \in N} p_i(\vec{0})$ - минимальная равновесная цена в случае отсутствия передачи. Исходный рынок полностью определяется следующими параметрами: N_1, N_2, p_{min}, d_i^f $(i \in N)$, Δp_i, Q_{i0}^0, e_{i0}^t, e_{i0}^q, e_{i0}^f $(i \in N \setminus \{0\})$. Параметры p_{min}, d_i^f, $|\Delta p_i|$, e_{i0}^t, e_{i0}, e_{i0}^f выбираются случайно и имеют равномерное распределение. Q_{i0}^0 равно 0 для всех линий. $\Delta p_i \ge 0$ для $i \in N_1$, и $\Delta p_i \le 0$ для $i \in N_2$.

Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение
p_{min}	0	10
d_i^f	10	20
$\|\Delta p_i\|$	0	10
e_{i0}^t	0	4
e_{i0}^q	0	4
e_{i0}^f	0	4

- Случайные рынки генерировались для $|N_1| = |N_2|$. Число узлов менялось от 3 до 55. Для каждого числа узлов сгенерировано 10000 задач.



Среднее (нижние наблюдения) и максимальное (верхние наблюдения) числа решаемых подзадач в логарифмической шкале



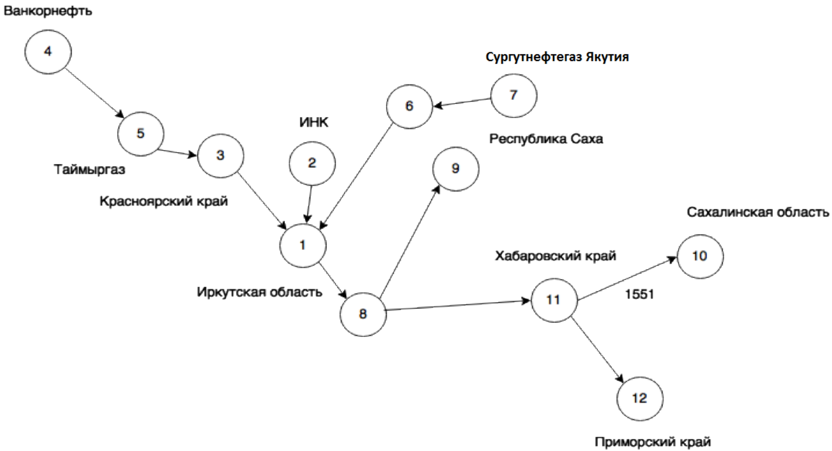
- x - число узлов;
- y_{av} - среднее число решаемых подзадач.

Методом наименьших квадратов получена следующая аппроксимация:

$$y_{av} = 0.0375x^3 - 0.8797x^2$$

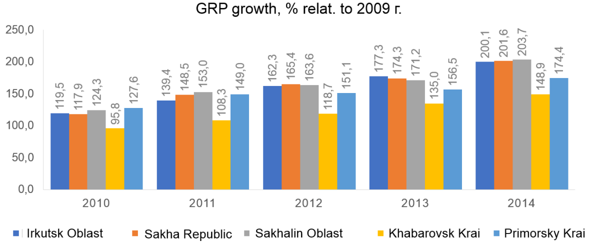
Соответствующий коэффициент детерминации R^2 равен $R^2 = 0.9517$. На рисунке представлена полученная аппроксимация.

Optimization of «Strength of Siberia» (stylized model)



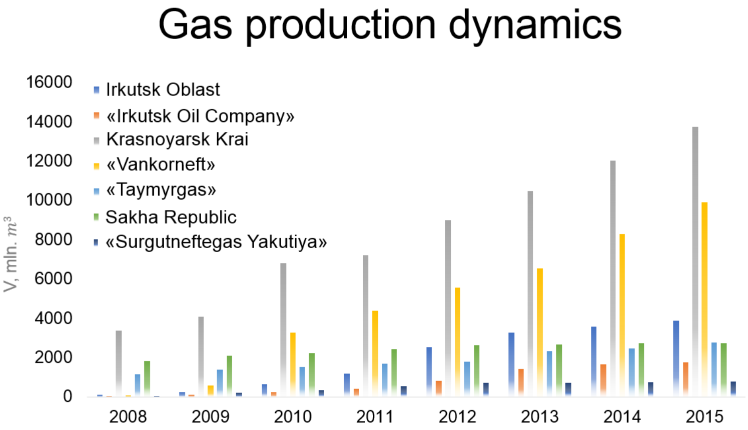
Modeling of demand and supply functions.

Pricing for gas



Gas consumption dynamics

№	Region	2010	2011	2012	2013	2014
1	Irkutsk Oblast	600	1400	2200	3000	3900
2	Sakha Republic	1555	1520,2	1751,5	1752,4	1756,3
3	Sakhalin Oblast	13912,15	13995,1	13616,71	14259,1	14269,8
4	Khabarovsk Krai	1300	1500	1740	2100	2500
5	Primorsky Krai	18,81	101,63	107,019	863,353	1362,2


Gas production dynamics
V, mln. m^3
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
Irkutsk Oblast
«Irkutsk Oil Company»
Krasnoyarsk Krai
«Vankorneft»
«Taymyrgas»
Sakha Republic
«Surgutneftegas Yakutiya»
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015

$$D_t(P_t, GRP_t) = a_0 + a_1 \cdot P_t + a_2 \cdot GRP_t,$$

where $D_t(P_t, GRP_t)$ - demand function, per annum t, mln. m^3; P_t - sales price for gas for year t, mln. rub./mln. m^3; GRP_t - GRP per capita, % to 2009.

Search for parameters:

$$f_t(P_t, GRP_t) = \sum_t (D_t(P_t, GRP_t) - V_t)^2 = \sum_t (a_0 + a_1 \cdot P_t + a_2 \cdot GRP_t - V_t)^2 \to min. \quad (15)$$

Results for regression calculation

№	Region	a_0	a_1	a_2	R^2
1	Irkutsk Oblast	-4333,41	-1,96	41,18	0,997
2	Sakha Republic	1353,56	-38,44	4,78	0,656
3	Sakhalin Oblast	13123,36	-86,21	12,73	0,955
4	Khabarovsk Krai	-625,39	-71,70	20,47	0,998
5	Primorsky Krai	-4230,52	-181,91	45,44	0,750

Supply functions parameters

We consider a linear function

$$S_t(P_t) = b_0 + b_1 \cdot P_t,$$

where P_t - sales price for gas for year t, mln. rub. / mln m^3.

№	Производители	a0	a1	R^2
1	Irkutsk Oblast	-4557,596	539,142	0,689
2	«Irkutsk Oil Company»	-2322,274	258,805	0,719
3	Krasnoyarsk Krai	-6188,654	1224,479	0,729
4	«Vankorneft»	-9088,002	1165,632	0,724
5	«Taymyrgas»	-578,407	205,489	0,811
6	Sakha Republic	1450,095	84,892	0,573
7	«Surgutneftegas Yakutiya»	-353,579	74,752	0,575

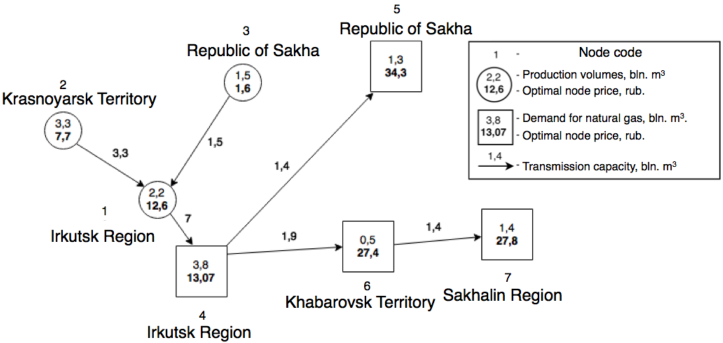
Each line l corresponds to the transport cost function $E_l(q_l)$, q_l - transmission capacity of gas pipeline and d_l is distance (km) between the vertices of the graph. The costs function $E_l(q_l)$ is defined as follows:

$$E_l(q_l) = \begin{cases} e_l^t(d_l) \cdot q_l, & q_l \leq Q_l^0, \quad e_l^t(d_l) = \delta \cdot d_l, \\ e_l^t(d_l) \cdot q_l + e_l^f(d_l), & q_l > Q_l^0, \quad e_l^f(d_l) = \gamma \cdot d_l, \end{cases}$$

where:

- Q_l^0 - initial transmission capacity, mln. m^3;
- $e_l^t(d_l)$ - transportation costs per unit of good, mln. rub./mln. m^3;
- $e_l^f(d_l)$ - fixed costs;
- γ - marginal capital investment, mln. rub./km;
- δ - transport tariff for gas, mln. rub./mln. m^3 per 100 km.

Optimization of «Strength of Siberia» (stylized model)



The problem of transmission system optimal development

- The demand $D_i(p_i,t)$ and the cost $c_i(v,t)$ functions are exogenously given for each $t=1,..,T$.
- The consumption utility function in the period t: $U_i(q,t)=\int\limits_0^q D^{-1}(v,t)dv$.
- Every transportation line $(i,j)\in L$ is characterized by the initial transmission capacity $Q^0_{ij}\geq 0$, the cost e^{tr}_{ij} per unit for the transfer of the resource from i to j, the cost of the transmission capacity increment in period t, including fixed cost e^f_{ij} and variable cost $e^{vt}_{ij}(\Delta Q_{ij}(t))$, as well as additional fixed cost E^{f0}_{ij} for the initial construction of the line, if $Q^0_{ij}=0$. The function $e^{vt}_{ij}(\Delta Q_{ij}(t))$ is monotonously increasing and convex.

Under the given $\overrightarrow{q}=(q_{ij}(t),(i,j)\in L,t=1,..,T)$ and $\overrightarrow{v}=(v_i(t),(i,j)\in L,t=1,..,T)$, the total social welfare is

$$W(\overrightarrow{Q},\overrightarrow{q},\overrightarrow{v})=\sum_{t=0}^{T}\sum_{i\in N}d(t)[U_i(t,v_i(t)+\sum_{l\in N(i)}q_{li}(t))-c_i(v_i(t),t)]-\sum_{(i,j)\in L,\ i<j}E_{ij}(\overrightarrow{Q}_{ij},\overrightarrow{q}_{ij}),$$

where $d(t)$ is a reduction coefficient for period t; typically $d(t)=d^t$ for $t<T$, $d(T)=d^T/(1-d)$, d is a discount coefficient; $\overrightarrow{Q}=(\overrightarrow{Q}_{ij},(i,j)\in L)$, $\overrightarrow{Q}_{ij}=(Q_{ij}(0),Q_{ij}(1),..,Q_{ij}(T))$ is a planned sequential expansion of the line $(i,j)\in L$, $Q_{ij}(0)\leq Q_{ij}(1)\leq .. \leq Q_{ij}(T)$; $\overrightarrow{q}_{ij}=(q_{ij}(t),t=1,...,T)$ is a flow of the good between nodes $(i,j)\in L$ depending on the time, $|q_{ij}(t)|\leq Q_{ij}(t-1)$.

The problem of transmission system optimal development

The function $E_{ij}(\overrightarrow{Q}_{ij}, \overrightarrow{q}_{ij})$ shows the present value of the total costs for the transfer:

$$E_{ij}(\overrightarrow{Q}_{ij}, \overrightarrow{q}_{ij}) = \sum_t |q_{ij}(t)| e_{ij}^{tr} d^t + \overline{E}_{ij}(\overrightarrow{Q}_{ij}),$$

where

$$\overline{E}_{ij}\left(\overrightarrow{Q}_{ij}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} [ind_{ij}(\overrightarrow{Q}, t)(e_{ij}^{f} + e_{ij}^{vt}(\Delta Q_{ij}(t)) + ind_{ij}^{0}(\overrightarrow{Q}, t) E_{ij}^{f0}] d^t,$$

$$ind_{ij}(\overrightarrow{Q}, t) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad Q_{ij}(t) > Q_{ij}(t-1), \\ 0 & \text{else}, \end{cases}$$

$$ind_{ij}^{0}(\overrightarrow{Q}, t) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad Q_{ij}(t-1) = 0 < Q_{ij}(t), \\ 0 & \text{else}. \end{cases}$$

Denote $\overrightarrow{J} = \{ind_{ij}(t), (i,j) \in L, t = 0, ..., T-1\}$. Consider an auxiliary problem:

$$\overline{W}\left(\overrightarrow{J}\right) = \max_{\overrightarrow{Q}: \overrightarrow{J}(\overrightarrow{Q}) = \overrightarrow{J}} W(\overrightarrow{Q}), \tag{16}$$

where

$$W\left(\overrightarrow{Q}\right) = \max_{(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{v}): |q_{ij}(t)| \le Q_{ij}(t-1), (i,j) \in L, t=0,...,T} W(\overrightarrow{Q}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{v}).$$

The main problem reduces to

$$\overrightarrow{J}^* \in Argmax_{\overrightarrow{J}} \overline{W}\left(\overrightarrow{J}\right).$$

Problem (16) is a special case of the known discrete time optimal control problem with linear dynamics (see Vasiliev, 1981):

$$I(u) = \sum_{t=0}^{T-1} F_t^0(x_t, u_t) + \Phi(x_T) \to \max_u$$

under conditions

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t, t = 0, 1, ..., T-1, x_0 = a;$$

$$x_t \in E^N, u = (u_0, u_1, ..., u_{T-1}), u_t \in V_t \subset E^r, t = 0, 1, ..., T-1;$$

where A_t, B_t, —- matrices of the corresponding dimensions, I — integral-terminal criterion, Φ — its terminal part, x_t is the phase vector and u_t is the control vector, V_t is the set of admissible control vectors at time t.
In our case $x_t = \overrightarrow{Q}(t)$, $u_t = \Delta\overrightarrow{Q}(t)$, so $N = r = |L|$;

$$V_t = \{\Delta\overrightarrow{Q}(t) \geqslant 0 | \forall (i,j)\ \Delta Q_{ij}(t) = 0 \ \text{ if } \ ind_{ij}(t) = 0,\ \Delta Q_{ij}(t) \leqslant \Delta Q_{max}\},$$

$$\overrightarrow{Q}(t+1) = \overrightarrow{Q}(t) + \Delta\overrightarrow{Q}(t),$$

$$F_t^0(x_t, u_t) = d(t)\left(W_t(\overrightarrow{Q}(t)) - E_t(\Delta\overrightarrow{Q}(t))\right),$$

$$\Phi(X_T) = d(T) W_T(\overrightarrow{Q}_T).$$

Theorems 4-6 in (Vasiliev, 1981) imply the following result. Let $p_i(\overrightarrow{Q}(t)), i \in N$, denote the competitive equilibrium prices under the given transmission capacities.

Theorem 11

$W(\Delta\overrightarrow{Q})$ is a concave function, its gradient components are as follows:

$$W'_{\Delta Q_{ij}(t)}(\overrightarrow{Q}(t)) = \psi_t^{ij} - d(t)(e_{ij}^{vt'}(\Delta Q_{ij}(t)) - e_{ij}^{tr})$$

for any (i,j) such that $ind_{ij}(t) = 1, t = 0,.., T-1$, where

$$\psi_t^{ij} = \sum_{\tau=t+1}^{T} d(\tau) W'_{\tau Q_{ij}}(\overrightarrow{Q}) = \sum_{\tau=t+1}^{T} d(\tau)(|p_i(\overrightarrow{Q}(\tau)) - p_j(\overrightarrow{Q}(\tau))| - e_{ij}^{tr}) \qquad (17)$$

and the necessary and sufficient conditions for optimality are: for any $t = 0,.., T-1$ and (i,j) such that $ind_{ij}(t) = 1$,

$$\Delta Q_{ij}(t) > 0 \Rightarrow d(t)(e_{ij}^{vt'}(\Delta Q_{ij}(t)) - e_{ij}^{tr}) = \sum_{\tau=t+1}^{T} d(\tau)(|p_i(\overrightarrow{Q}(\tau)) - p_j(\overrightarrow{Q}(\tau))| - e_{ij}^{tr}),$$

$$\Delta Q_{ij}(t) = 0 \Rightarrow d(t)(e_{ij}^{vt'}(0) - e_{ij}^{tr})) > \sum_{\tau=t+1}^{T} d(\tau)(|p_i(\overrightarrow{Q}(\tau)) - p_j(\overrightarrow{Q}(\tau))| - e_{ij}^{tr}).$$

Concluding remarks

Investigation of the model with endogenous supply and demand dynamics is a challenging task.

Список литературы - 1

- Arrow, K.J., Debreu, G. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy // Econometrica. - 1954. - Vol. 22. - P. 265–290.
- Cherenin V. P. Solving some combinatorial problems of optimal planning by the method of successive calculations // Proceedings of the Conference on Experiences and Perspectives of the Application of Mathematical Methods and Electronic Computers in Planning. Mimeograph, Novosibirsk., 1962 (in Russian).
- Davidson M.R., Dogadushkina Y.V., Kreines E.M., Novikova N.M., Seleznev A.V., Udaltsov Y.A., Shiryaeva L.V. Mathematical Model of Power System Management in Conditions of a Competitive Wholesale Electric Power (Capacity) Market in Russia // Journal of Computer and Systems Sciences International. - 2009. - Vol. 48. - P. 243–253.
- Daylova E.A., Vasin A.A. Determination of Transmission Capacity for a Two-node Market // Procedia Computer Science. - 2014. - Vol. 31. P. 151–157.
- Enrico Edoli, Stefano Fiorenzani, Tiziano Vargiolu. Co-optimization of energy market and ancillary services. Paper presented at the IEEE Xplore, International Power Engineering Conference. - 2005.
- Guisewite G.M., Pardalos P.M. Minimum concave-cost network flow problems: Applications, complexity, and algorithms // Annals of Operations Research. - 1990. - Vol. 25 (1). - P. 75–99.
- Hogan W. Competitive electricity market design: a wholesale primer // Tech. Rep. Harvard Electricity Policy Group. 1998.
- Hogan W., Rosellon J., Vogelsang I.Toward a combined merchant-regulatory mechanism for electricity transmission expansion. Working papers DTE 389, CIDE, Division de Economia. 2007.
- Kantorovich L.V., Gavurin M.K., Application of mathematical methods in the analysis of cargo flows // Problems of increasing the efficiency of transport. M.: Publishing House of AN USSR. - 1949. - P. 110-138 (the work was written in 1940, in Russian).

- Khachaturov V.R. Mathematical Methods of Regional Programming // Nauka, Moscow. - 1989 (in Russian).
- Roger Z.Rios-Mercado, ConradoBorraz-Sanchez. Optimization problems in natural gas transportation systems: A state-of-the-art review // Applied Energy. - 2015. - Vol 147(1). - P. 536-555.
- Rosellon J. Different Approaches Towards Electricity Transmission Expansion // Review of Network Economics. - 2003. 2(3). - P. 238–269.
- Stoft S. Power System Economics: Designing Markets for Electricity. New York. Wiley. - 2002.
- Vasiliev, F.P. Methods for solving extremal problems. M: Nauka. - 1981.
- Vasin A., Dolmatova M., Optimization of transmission capacities for multinodal markets // Procedia Computer Science. - 2016. - Vol. 91. - P. 238-244.
- Vasin A.A., Grigoryeva O.M., Tsyganov N.I., Optimization of an energy market transportation system // Doklady Mathematics. - 2017. - Vol. 96, No.1. - P. 1-4.
- Vasin, A.A., Grigoryeva, O.M., Tsyganov, N.I. Optimization of energy market's transport infrastructure // Journal of Global Optimization. - 2019
- Vasin A. A., Lesik I. A., Grigoryeva O. M. Designing a Transport System for a Multinode Competitive Market with Variable Demand // Computational Mathematics and Modeling. - 2018. - Vol. 29, Issue 2. - P. 211–227.
- Vasin, A.A., Grigoryeva, O.M., Tsyganov, N.I. Energy markets: optimization of transportation system. Paper presented at the VIII Moscow International Conference on Operation Research (ORM 2018), 1. 2018. pp. 183-189.